

**MJEŠOVITA SREDNJA EKONOMSKO-UGOSTITELJSKA ŠKOLA  
TRAVNIK**

Datum: Mart 2017. godine

Profesor: Nihad Čukle

**PRIPREMA NASTAVNIKA ZA ČAS – OGLEDNI ČAS**

Nastavna jedinica: Diferencijalni račun

Razred: IV-1

Predmet: Matematika

R/b časa: 44

**OBRAZOVNI ZADACI:**

- Usvajanje znanja o diferencijalnom računu
- Ovladavanje vještina primjene naučenog znanja

**FUNKCIONALNI ZADACI:**

- Razvijanje logičkog mišljenja i zaključivanja
- Poticati primjenu i povezivanje ranije stečenog znanja, razvijati sposobnost promatranja, opisivanja, uočavanja i bilježenja
- Razvijanje sposobnosti zapažanja

**ODGOJNI ZADACI:**

- Razvijati potrebu i volju za sticanje novih spoznaja
- Razvijanje zdravog takmičarskog duha i solidarnosti među učenicima
- Formiranje pozitivnih osobina ličnosti: tačnost, preciznost, istrajnost, urednost,...

Tip časa: obrada novog sadržaja

Nastavne metode: usmeno izlaganje i objašnjavanje, razgovor, samostalni radovi učenika

Nastavna sredstva i pomagala: tabla, kreda, udžbenik, laptop, projektor, nastavni listići

Oblici rada: frontalni, individualni

Vrste nastave: predavačko – receptivna

Naučna, stručna i metodička literatura: Matematika za VI razred – Nataša Džubur  
Zbirka zadataka za VI razred – Adem Huskić

Ključni pojmovi: Diferencijalni račun, deriviranje, tangenta, problem brzine, maksimum, minimum funkcije, izvod, ...

# Struktura i tok časa

## UVODNI DIO SATA ( 10 minuta )

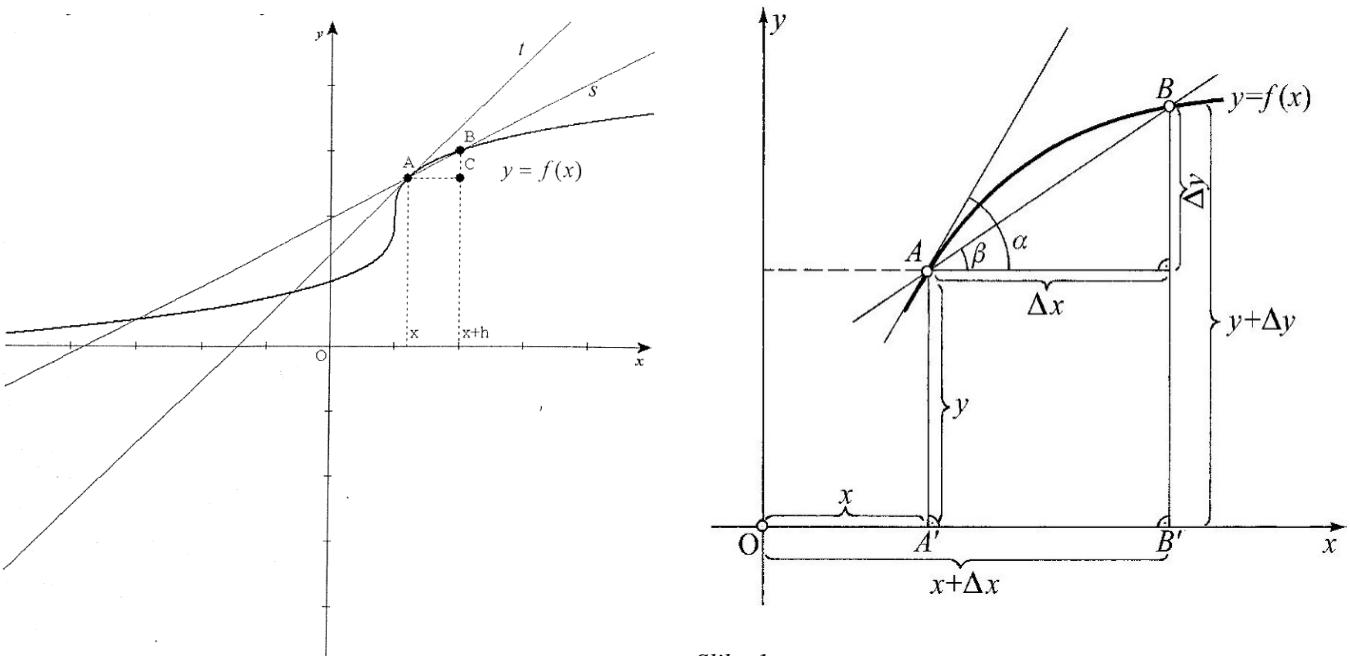
Razgovor sa učenicima o gradivu s prethodnih časova. Ponoviti sa učenicima ranije stečena znanja o graničnim vrijednostima (limesima) funkcija.

Najava cilja časa.

## GLAVNI DIO SATA ( 30 minuta )

### Izvod (derivacija funkcije)

S ciljem navođenja definicije izvoda (derivacije) funkcije  $y = f(x)$ , u konkretnoj tački  $x$ , trebamo sljedeću sliku :



Slika 1.

Označimo sa  $\Delta x = h$  prirast (diferenciju) nezavisno promjenjive (argumenta)  $x$ , a sa  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + h) - f(x)$  prirast (diferenciju) zavisno promjenjive (funkcije)  $y = f(x)$ . Na slici je  $AC = \Delta x = h$ ,  $BC = \Delta y$ .

### Definicija 1. (izvoda funkcije u tački)

Neka je funkcija  $y = f(x)$  definisana u tački  $x$ , i nekoj okolini te tačke. Prepostavimo da postoji granična vrijednost  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , konačna ili beskonačna.

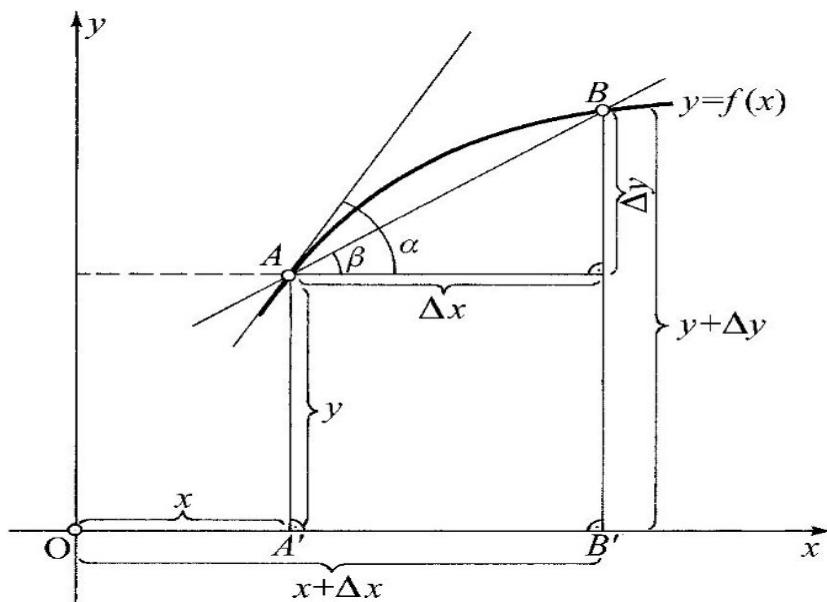
Tada broj  $y' \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  nazivamo prvi izvod (derivacija) funkcija  $y = f(x)$ , u tački  $x$ .

U slučaju beskonačnog izvoda  $y'$  zahtijevamo i dodatni uslov da je funkcija  $y = f(x)$  u posmatranoj tački  $x$  neprekidna.

Prvi izvod funkcija  $y = f(x)$ , u konkretnoj tački  $x$ , osim oznake  $y'$ , možemo označiti jednom od sljedećih oznaka :  $y'(x)$ ,  $y'_{|x}$ ,  $f'(x)$ ,  $f'_{|x}$ ,  $\frac{dy}{dx}$ .

U vezi sa Slikom 1., uzimimo da je  $\beta$  ugao koji sječica (sekanta)  $s$ , kroz tačke  $A$  i  $B$ , obrazuje sa pozitivnim dijelom  $x$ -ose, a neka je  $\alpha$  ugao koji tangenta  $t$  u tački  $A$  krive obrazuje sa pozitivnim dijelom  $x$ -ose. Sa slike vidimo da, kada  $\Delta x \rightarrow 0$ , tada se tačka  $B$  po krivoj  $y = f(x)$  približava tački  $A$ , a sječica  $s$ , kroz tačke  $A$  i  $B$ , približava se tangentni  $t$ , krive  $y = f(x)$ , u tački  $A(x, y) = A(x, f(x))$

Dakle, kada  $\Delta x \rightarrow 0$ , tada se ugao  $\beta$  približava uglu  $\alpha$ , pa zato  $\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (suprotna kateta kroz nalegla kateta) teži (približava se) ka  $\tan \alpha$ , kada  $\Delta x \rightarrow 0$ . S druge strane, kako je  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ , zaključujemo da je  $y' = \tan \alpha$ .



Zato je **geometrijsko tumačenje** prvog izvoda funkcije sljedeće:

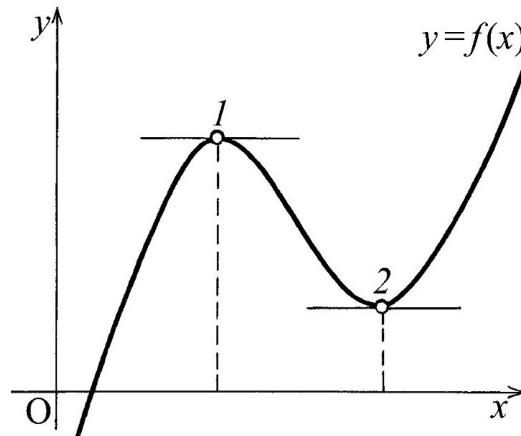
Prvi izvod  $y' = f'(x)$ , funkcije  $y = f(x)$ , u tački  $x$ , predstavlja **koeficijent pravca tangente  $t$**  na krivu  $y = f(x)$ , u tački  $A(x, y) = A(x, f(x))$ , te krive. Koeficijent pravca tangente je u stvari nagib krive u posmatranoj tački krive, a fizikalno gledajući, to je **brzina promjene** vrijednosti funkcije u konkretnom trenutku vremena (**trenutna brzina tijela**).

### EKSTREMNE VRIJEDNOSTI

Ako je  $f'(x_0) = 0$  ( $\tan \alpha = 0$ ), tada je tangenta paralelna sa  $x$ -osom, pa njena jednačina glasi  $y = y_0$ . Ako je  $f'(x_0) = \infty$ , ili  $f'(x_0) = -\infty$ , tada je tangenta okomita na  $x$ -osu, pa njena jednačina glasi  $x = x_0$ .

1. maksimum

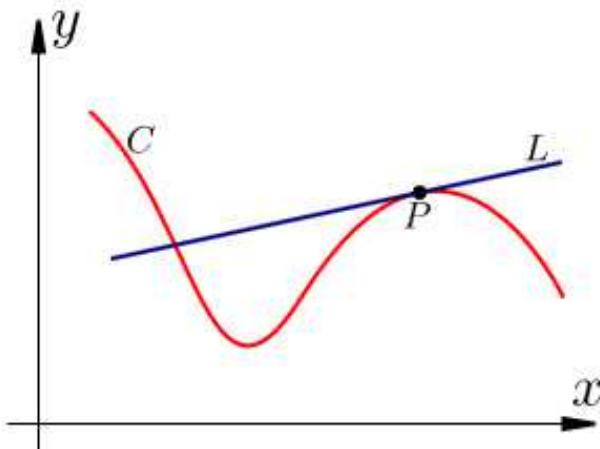
2. minimum



Izračunavanje izvoda (derivacije) funkcije naziva se diferenciranje (deriviranje), a račun koji nas uči kako to radimo, zove se **diferencijalni račun**.

Ako izvod  $y' = f'(x)$  postoji, i konačan je broj, tada kažemo da je funkcija  $y = f(x)$  diferencijabilna u tački  $x$ .

U matematici derivacije funkcija imaju široku primjenu u svim znanstvenim i mnogim drugim područjima gdje je potreban proračun razvoja funkcije u određenom intervalu. Tako je npr. u geometriji derivacija nagib tangente na funkciju u određenoj tački, u **ekonomiji** npr. **rast inflacije u vremenu**, a u fizici deriviranjem puta po vremenu dobijemo iznos brzine.



Slika 2.

Pravac  $L$  tangira funkciju  $f$  u tački  $P$  čija derivacija odgovara nagibu pravca  $L$  u tački  $P$

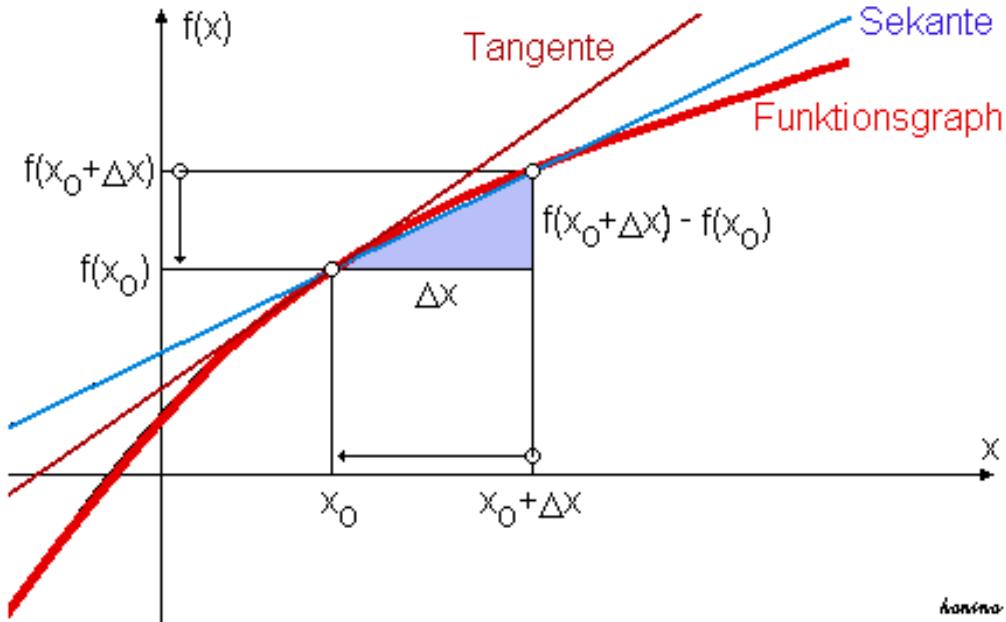
Za ilustraciju, ovako se derivira funkcija  $f(x)=x^2$ :

$$(x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

što znači da je funkcija  $x^2$  diferencijabilna u cijeloj domeni (za sve vrijednosti varijable  $x$ ), a njezina derivacija je funkcija  $2x$ .

Derivacija u pojedinoj tački dobije se uvrštavanjem vrijednosti za  $x$ , npr. u tački  $x=3$  derivacija funkcije  $x^2$  iznosi  $2x=6$ .

## Geometrijska interpretacija



U geometrijskom smislu derivacija funkcije  $f$  je nagib tangente u određenoj tački  $x_0$ .

Korištenjem definicije izvoda, i pravila za limese moguće je dokazati sljedeća **pravila za izvode :**

### PRAVILA DERIVIRANJA

- DERIVACIJA KONSTANTE
- DERIVACIJA PROIZVODA KONSTANTE I FUNKCIJE
- DERIVACIJA ZBIRA I RAZLIKE FUNKCIJE
- DERIVACIJA PROIZVODA FUNKCIJE
- DERIVACIJA KOLIČNIKA FUNKCIJA

$$\begin{aligned} C' &= 0 \\ (C \cdot f)' &= C \cdot f' \\ (f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \end{aligned}$$

### TABLICA OSNOVNIH DERIVACIJA

$f$	$f'$	$f$	$f'$	$f$	$f'$
$x$	1	$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$\operatorname{ctgx}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$e^x$	$e^x$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sin x$	$\cos x$

**Primjer 1.** Deriviraj  $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

$$f'(x) = \underbrace{(3x^2 + 4x + 1)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} = \underbrace{(3x^2)' + (4x)' + (1)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} = \underbrace{3 \cdot (x^2)' + 4 \cdot (x)' + 0}_{\text{prema tablici derivacija}} = 3 \cdot 2x + 4 \cdot 1 + 0 = 6x + 4$$

**Primjer 2.** Deriviraj  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^2 + 2}{2x - 1} \right)' = \underbrace{\frac{(x^2 + 2)' \cdot (2x - 1) - (x^2 + 2) \cdot (2x - 1)'}{(2x - 1)^2}}_{\text{prema pravilima deriviranja}} = \underbrace{\frac{(2x + 0) \cdot (2x - 1) - (x^2 + 2) \cdot (2 - 0)}{(2x - 1)^2}}_{\text{prema pravilima deriviranja i tablici derivacija}} = \\ &= \frac{4x^2 - 2x - 2x^2 - 4}{(2x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{(2x - 1)^2} = \frac{2(x^2 - x - 2)}{(2x - 1)^2} \end{aligned}$$

**Primjer 3.** Deriviraj  $f(x) = (\sin x + 1)(\cos x - 2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((\sin x + 1)(\cos x - 2))' = \underbrace{(\sin x + 1)' \cdot (\cos x - 2) + (\sin x + 1) \cdot (\cos x - 2)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} = \\ &= \underbrace{(\cos x + 0) \cdot (\cos x - 2) + (\sin x + 1) \cdot (-\sin x - 0)}_{\text{prema pravilima derivacija i tablici derivacija}} = \cos^2 x - 2 \cos x - \sin^2 x - \sin x \end{aligned}$$

**Primjer 4.**  $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$      $y = x^2 x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}$      $y' = \frac{8}{3} x^{\frac{8}{3}-1} = \frac{8}{3} x^{\frac{5}{3}} = \frac{8}{3} \sqrt[3]{x^5} = \frac{8}{3} x^{\frac{2}{3}}$

### Diferencijalni račun ( istorijat )

Problemi tangente i brzine, kao i problemi ekstrema tj. minimuma i maksimuma su postepeno utjecali na nastajanje pojma izvoda. Mnogi matematičari, još od doba antičke Grčke, uspjevali su da riješe neke od ovih problema za pojedinačne slučajeve.

Tek kada je Dekart pronašao metodu koordinata omogućeno je da se krive predstavljaju jednačinama, tako da je stvoren osnovni preduslov za pojavu opšte metode za analitičko rješavanje problema tangente, odnosno za definisanje pojma izvoda.

Problem tangente prvi je rješio njemački matematičar i filozof **Lajbnic**, definišući novu oblast matematike pod nazivom diferencijalni račun. U isto vrijeme **Njutn** je definisao izvod kao posljedicu istraživanja fenomema kretanja.

To su bile dvije idejno i metodološki različite koncepcije koje su dovele od **istog rezultata**. Danas diferencijalni račun predstavlja nezaobilazno sredstvo u rješavanju mnogih problema savremene nauke i tehnike.



G. Leibniz (1646-1716)

I. Newton (1642-1727)

Najpoznatiji spor u istoriji matematike vođen je između Njutna i Lajbnica oko otkrića diferencijalnog računa. **Njutn** je imao samo oko 23 godine kada je 1666. godine otkrio metod, koji je nazvao metod flukcije. On je prvi shvatio da su integracije i diferenciranje dvije inverzne operacije. Međutim okljevao je sa objavljuvanjem svojih rezultata. U međuvremenu 1675. godine **Lajbnic** je samostalno došao do istog metoda koji je nazvao **diferencijalni račun**. On je svoje rezultate odmah publikovao i dobio sva priznanja. Sukob ovih matematičara se nastavljao tako da je londonsko kraljevsko društvo formiralo komitet koji je 1713. godine razmatrao ovaj problem i dali su prioritet Njutnu. Međutim matematička simbolika koju je uveo Lajbnic je bila mnogo jednostavnija i opšte je prihvaćena.

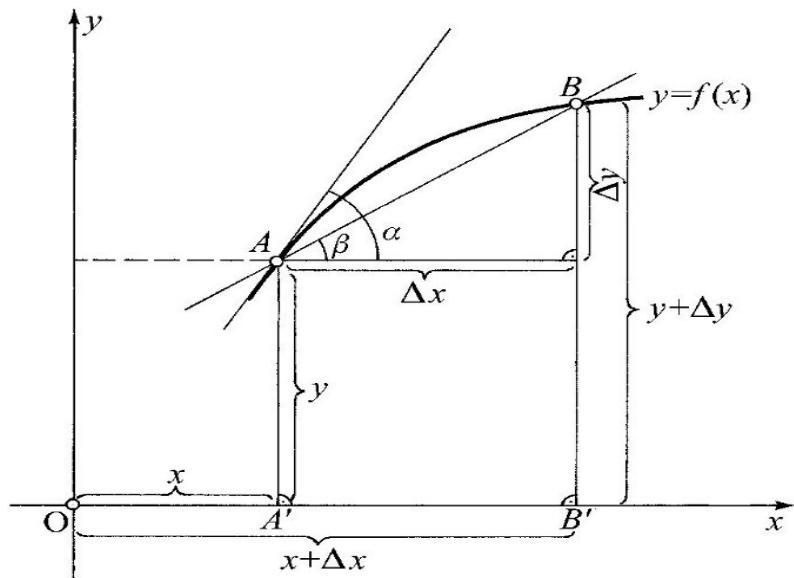
**Gotfrid Vilhelm Frajher (baron) fon Lajbnić** (njem. Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz) bio je njemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik, istoričar diplomata i politički savjetnik.

**Isak Njutn** (engl. ser Isaac Newton) bio je engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof prirode, koji je danas za većinu ljudi jedna od najvećih ličnosti u istoriji nauke.

---

Diferencijalni račun ispituje derivacije funkcija i njihovu primjenu. Do pojma derivacije najjednostavnije se dolazi određivanjem smjera tangente u nekoj tački krive koja je u koordinatnom sustavu  $xOy$  određena funkcijom  $y = f(x)$ . U tački A te krive povučena je sekanta AB (*Pravac p sijeće kružnicu u dvije tačke. Takav pravac naziva se sekanta kružnice*).

Zakreće li se sekanta AB oko sjecišta A dok sjedište B ne padne u tačku A, prijeći će sekanta u tangentu s diralištem u tački A (*Pravac dira kružnicu u jednoj tački. Takav pravac zove se tangenta kružnice. Tangenta je okomita na poluprečnik kružnice povučen u diralištu, a udaljenost tangente od središta jednaka je radiusu*)



Tačka A ima koordinate  $(x, y)$ , a tačka B koordinate  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Ti prirasti  $\Delta x$  i  $\Delta y$  bit će to manji što tačka B bude bliža tački A. Smjer sekante AB određen je uglom što ga ona zatvara s osi x, dakle koeficijent smjera je  $\tan \beta = \Delta y / \Delta x$ . Kad se tačka B kreće po krivoj prema točki A, tada ugao  $\beta$  teži prema uglu  $\alpha$ , a prirasti  $\Delta x$  i  $\Delta y$  prema nuli, tj.  $\beta \rightarrow \alpha$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Zato derivacija  $f'(x)$  funkcije  $f(x)$  određuje koeficijent smjera tangente krive  $y = f(x)$ , u njenoj tački, apscise  $x$ . Ako funkcija  $f$  ima derivaciju u tački  $x$  (odn. ako kriva  $y = f(x)$  ima u tački apscise  $x$  tangentu), kaže se da je  $f$  diferencijabilna ili derivabilna u toj tački.

### Ekstremne vrijednosti

Ekstremne vrijednosti su najveća ili najmanja vrijednost u nekom skupu brojeva. Najveća vrijednost naziva se maksimum, a najmanja minimum. Određivanje ekstremnih vrijednosti funkcija ubraja se među važne matematičke probleme, od kojih su neke poznavali i rješavali već stari grčki matematičari. Najstariji od tih problema svodili su se obično na određivanje geometrijskih likova, koji uz zadani obim imaju maksimalnu površinu, odnosno uz zadano oplošje maksimalni volumen. Tako od svih ravних likova uz jednak obim najveću površinu ima krug, a od svih tijela jednakog oplošja najveći volumen ima kugla.

$$O=2r\pi, \quad P=r^2\pi \quad (\text{formula za obim i površinu kruga})$$

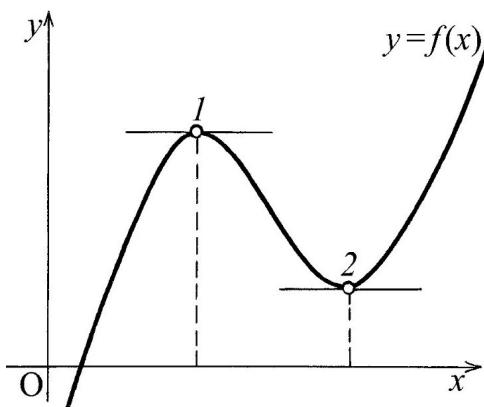
$$P=ab \quad (\text{formula za površinu kvadrata})$$

$$O=18$$

$$P=5*4=20$$

$$P=6*3=18$$

$$9=r\pi, \quad r \approx 2,86, \quad P \text{ kruga približno } 25 \text{ m}^2 \quad (\text{ako je obim } 18 \text{ m})$$



Općenitiju metodu kojom se rješava problem određivanja ekstremnih vrijednosti derivabilnih funkcija dao je tek diferencijalni račun, u kojem je određivanje ekstrema, npr. za funkciju  $y = f(x)$ , svedeno na traženje onih vrijednosti od  $x$  za koje je  $f'(x) = 0$ , odnosno na traženje tačaka krive  $y = f(x)$ , u kojima je tangenta paralelna s osi  $x$ .

### ZAVRŠNI DIO SATA ( 5 minuta )

Šta smo danas naučili? Ponoviti najbitnije sa nekoliko pitanja.

Kako smo se osjećali na današnjem času? Vrednovanje znanja učenika.

Domaći rad : Zbirka zadataka za VI razred – Adem Huskić